10.4 APLICACIONES ECONÓMICAS DE LA INTEGRACIÓN

Hemos motivado la integral definida como una herramienta para calcular el área bajo una curva. Sin embargo tiene otras interpretaciones importantes. Por ejemplo, también tenemos que recurrir a la integral definida cuando queremos hallar el volumen de un sólido de revolución o la longitud de una curva. No pocos de los conceptos más importantes de la estadística se expresan mediante integrales de distribuciones continuas de probabilidad. En esta sección se dan algunos ejemplos que prueban más directamente la importancia de las integrales en economía.

Extracción del petróleo de un pozo

Supongamos que en el instante $t = 0$ comenzamos a extraer petróleo de un pozo cuyas reservas se calculan en K barriles. Definamos

$$x(t) = \text{cantidad de petróleo en barriles que queda en el instante } t$$

En particular, $x(0) = K$. Si suponemos que no podemos rellenar el pozo, $x(t)$ es una función decreciente de t. La cantidad de petróleo extraída en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ (donde $\Delta t > 0$) es $x(t) - x(t + \Delta t)$. La cantidad extraída por unidad de tiempo es, por tanto,

$$\frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{$*$}$$

Si suponemos que $x(t)$ es derivable, el límite de la fracción $(*)$ cuando Δt tiende a cero es igual a $-\dot{x}(t)$. Si $u(t)$ designa la tasa de extracción en el instante t, tenemos

$$\dot{x}(t) = -u(t) \qquad \text{con} \qquad x(0) = K \tag{10.23}$$

La solución al problema con valores iniciales (10.23) es

$$x(t) = K - \int_0^t u(\tau)\, d\tau \tag{10.24}$$

En efecto, comprobamos (10.24) de la forma siguiente. Primeramente, al hacer $t = 0$ obtenemos $x(0) = K$. Además, derivando (10.24) con respecto a t según la regla (10.20) de la Sección 10.3 obtenemos $\dot{x}(t) = -u(t)$. El resultado (10.24) se puede interpretar así: la cantidad de petróleo que queda en el instante t es igual a la cantidad inicial K menos el total que ha sido extraído durante el periodo de tiempo $[0, t]$, a saber $\int_0^t u(\tau)\, d\tau$.

Si la tasa de extracción es constante, digamos $u(t) = \overline{u}$, entonces (10.24) da

$$x(t) = K - \int_0^t \overline{u}\, d\tau = K - \Big|_0^t\, \overline{u}\tau = K - \overline{u}t$$

En particular, el pozo se agotará cuando $K - \overline{u}t = 0$, o sea cuando $t = K/\overline{u}$. (Por supuesto, podríamos haber hallado directamente la respuesta en el caso de tasa constante sin tener que recurrir a la integración, pero no en otro caso.)

Este ejemplo sirve de ilustración de dos conceptos cuya distinción es importante en varios razonamientos económicos. La magnitud $x(t)$ es una *reserva* o un *stock*, medido en barriles. Por otra parte, $u(t)$ es un *flujo*, medido en barriles *por unidad de tiempo*.

Reserva de divisas de un país

Supongamos que $F(t)$ designa las reservas de divisas de un país en el instante t. Suponiendo que

F es derivable, la tasa de variación de estas reservas por unidad de tiempo es

$$f(t) = F'(t) \tag{10.25}$$

Si $f(t) > 0$, esto significa que hay un flujo neto de divisas que entran en el país en el instante t, mientras que $f(t) < 0$ significa que salen divisas. Del concepto de integral definida se deduce que

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt \tag{10.26}$$

Esta expresión mide la variación de las reservas en divisas en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. La Figura 10.11 representa un ejemplo. Hay un flujo neto de entrada de divisas entre t_0 y t', luego un flujo neto de salida entre t' y t'' y, finalmente, un flujo neto de entrada entre t'' y t_1. (Nótese que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$ no es igual al área total limitada por la gráfica, el eje x y las rectas $t = t_0$ y $t = t_1$ en este caso. Véase el final de la Sección 10.1.)

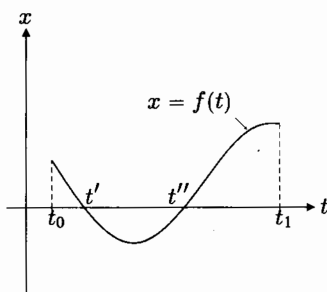


FIGURA 10.11 La tasa de variación de las reservas de divisas.

Distribución de la renta

En muchos países las autoridades hacen públicos datos anónimos sobre la renta de las personas físicas. Se pueden usar estos datos para poner de relieve algunas propiedades de la distribución de la renta en un año dado, o bien cómo esta distribución varía de año en año.

Medimos la renta en dólares y designamos por $F(r)$ a la proporción de individuos que ganan no más de r dólares. Si la población es de n individuos, $nF(r)$ es el número de individuos con renta no superior a r. Si r_0 es la renta más baja del grupo y r_1 la más alta, nos interesa la función F en el intervalo $[r_0, r_1]$. Por definición, F no es continua y, por tanto, no derivable en $[r_0, r_1]$ porque r toma sólo valores que son múltiplos de 0,01\$ y $F(r)$ tiene que ser múltiplo de $1/n$. Sin embargo, si la población es muy grande, es posible normalmente "suavizar" la función (es decir, sustituirla por otra función derivable casi idéntica a ella), lo que da una buena aproximación de la verdadera distribución de renta. Supongamos, por tanto, que F es una función con derivada continua f, esto es

$$f(r) = F'(r) \qquad (\text{para todo } r \in (r_0, r_1))$$

Por la definición de derivada tenemos que

$$f(r)\, \Delta r \approx F(r + \Delta r) - F(r)$$

para todo Δr suficientemente pequeño. Así, $f(r)\, \Delta r$ es aproximadamente igual a la proporción de individuos que ganan entre r y $r + \Delta r$. La función f se llama la **función de densidad de la renta** y F se llama la **función de distribución acumulada** o, simplemente, la **función de distribución**[3]

[3] El lector que sepa estadística elemental verá la analogía con las funciones de densidad de la probabilidad y con las funciones de distribución (acumuladas).

asociada a f.

Supongamos que f es una función de densidad continua de la renta de una cierta población con rentas en el intervalo $[r_0, r_1]$. Si $r_0 \leq a \leq b \leq r_1$, la discusión previa y la noción de integral definida implican que $\int_a^b f(r)\,dr$ es la proporción de individuos con rentas en $[a, b]$. Así,

$$n \int_a^b f(r)\,dr \quad = \quad \text{el } \textbf{número de individuos} \text{ con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.27}$$

Vamos a hallar expresiones relativas a la renta de los que ganan entre a y b dólares. Designemos por $M(r)$ la renta total de aquéllos que ganan no más de r dólares y consideremos el intervalo de renta $[r, r + \Delta r]$. Hay aproximadamente $nf(r)\,\Delta r$ individuos con rentas en ese intervalo. Cada uno de ellos tiene una renta aproximadamente igual a r, luego la renta total de esos individuos, $M(r + \Delta r) - M(r)$, es aproximadamente igual a $nrf(r)\,\Delta r$. Así tenemos

$$\frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} \approx nrf(r)$$

La aproximación mejora (en general) cuando Δr disminuye. Tomando límites cuando $\Delta r \to 0$ obtenemos $M'(r) = nrf(r)$, luego $n \int_a^b rf(r)\,dr = M(b) - M(a)$. Por tanto,

$$n \int_a^b rf(r)\,dr \quad = \quad \text{la } \textbf{renta total} \text{ de los individuos con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.28}$$

Se puede refinar el razonamiento que conduce a (10.28): $M(r + \Delta r) - M(r)$ es la renta total de los que tienen su renta en el intervalo $[r, r + \Delta r]$, con $\Delta r > 0$. En este intervalo de renta hay $n[F(r + \Delta r) - F(r)]$ individuos, cada uno de los cuales gana a lo más $r + \Delta r$ y como mínimo r. Así,

$$nr[F(r + \Delta r) - F(r)] \leq M(r + \Delta r) - M(r) \leq n(r + \Delta r)[F(r + \Delta r) - F(r)] \tag{1}$$

Si $\Delta r > 0$, dividiendo por Δr obtenemos

$$nr\,\frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} \leq \frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta r} \leq n(r + \Delta r)\frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} \tag{2}$$

(Si $\Delta r < 0$, las desigualdades de (1) no cambian de sentido mientras que las de (2) se invierten.) Cuando $\Delta r \to 0$ obtenemos $nrF'(r) \leq M'(r) \leq nrF'(r)$, luego

$$M'(r) = nrF'(r) = nrf(r) \tag{3}$$

La razón entre la renta total y el número de individuos que pertenecen a un cierto intervalo $[a, b]$ de renta se llama la renta media de los individuos en ese intervalo de renta. Tenemos, por tanto,

$$m = \frac{\int_a^b rf(r)\,dr}{\int_a^b f(r)\,dr} = \text{la } \textbf{renta media} \text{ de los individuos con rentas en el intervalo } [a, b] \tag{10.29}$$

Una función de densidad de la renta que aproxima bastante bien las distribuciones reales de renta, especialmente para rentas grandes, es la que determina la **distribución de Pareto**. En este caso, la proporción de individuos que gana como mucho r dólares viene dada por

$$f(r) = Br^{-\beta} \tag{10.30}$$

donde B y β son constantes positivas. Las estimaciones empíricas de β están usualmente en el intervalo $2{,}4 < \beta < 2{,}6$. Para valores de r cercanos a 0, la fórmula no sirve para nada cuando $\beta \geq 1$, porque $\int_a^b f(r)\,dr \to \infty$ cuando $r \to 0$ (véase Sección 11.3.)

Ejemplo 10.9

En una población con rentas entre a y b, supongamos que la distribución de la renta viene dada por la función de densidad

$$f(r) = Br^{-2,5} \qquad (B \text{ es una constante positiva}) \tag{1}$$

Determínese la renta media de este grupo.

Solución: Se tiene que

$$\int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b Br^{-2,5}\,dr = B \Big|_a^b \left(-\tfrac{2}{3}r^{-1,5}\right) = \tfrac{2}{3}B\left(a^{-1,5} - b^{-1,5}\right)$$

También

$$\int_a^b rf(r)\,dr = \int_a^b rBr^{-2,5}\,dr = B \Big|_a^b r^{-1,5}\,dr = -2B \Big|_a^b r^{-0,5} = 2B\left(a^{-0,5} - b^{-0,5}\right)$$

Por tanto, la renta media del grupo es

$$m = \frac{2B\left(a^{-0,5} - b^{-0,5}\right)}{(2/3)B\left(a^{-1,5} - b^{-1,5}\right)} = 3\frac{a^{-0,5} - b^{-0,5}}{a^{-1,5} - b^{-1,5}} \tag{2}$$

Supongamos que b es muy grande. Entonces $b^{-0,5}$ y $b^{-1,5}$ están próximos a 0, y así (2) implica que $m \approx 3a$. La renta media de los que ganan al menos a es, por tanto, aproximadamente $3a$.

La influencia de la distribución de la renta en la demanda

Supongamos que se oferta a los individuos de una población un bien cuya demanda depende solamente del precio p y de la renta r de cada individuo. Sea $D(p, r)$ una función continua que designa al número de unidades demandadas por un individuo con renta r cuando el precio unitario es p. Si las rentas del grupo oscilan entre a y b y la distribución de la renta viene dada por la función de densidad $f(r)$, ¿cuál es la demanda total del bien cuando su precio es p?

Supongamos fijado el precio p y designemos por $T(r)$ a la demanda total del bien de todos los individuos que ganan a lo más r. Consideremos el intervalo de renta $[r, r + \Delta r]$. Hay aproximadamente $nf(r)\,\Delta r$ individuos cuyas rentas están en ese intervalo. Como cada uno de ellos demanda aproximadamente $D(p, r)$ unidades del bien, la demanda total de esos individuos será aproximadamente de $nD(p, r)f(r)\,\Delta r$. Por otra parte, la demanda total verdadera de los individuos con rentas en el intervalo $[r, r + \Delta r]$ viene dada por $T(r + \Delta r) - T(r)$. Así debemos tener $T(r + \Delta r) - T(r) \approx nD(p, r)f(r)\,\Delta r$ y, por tanto,

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \approx nD(p, r)f(r)$$

La aproximación mejora (en general) cuando Δr disminuye y, tomando límite cuando $\Delta r \to 0$, obtenemos $T'(r) = nD(p,r)f(r)$. Se tiene que $T(b) - T(a) = n\int_a^b D(p,r)f(r)\,dr$ por definición de integral definida. Pero $T(b) - T(a)$ es la medida que buscábamos de la demanda total del bien por todos los individuos del grupo. Dependerá, naturalmente, del precio p. Así la designamos por $x(p)$ y tenemos

$$x(p) = \int_a^b nD(p,r)f(r)\,dr \qquad \textbf{(demanda total)} \qquad (10.31)$$

Ejemplo 10.10

Supongamos que la distribución de la renta es la del Ejemplo 10.9 y sea $D(p,r) = Ap^{-1{,}5}r^{2{,}08}$. (Esta función describe la demanda de leche en Noruega durante el periodo 1925–1935. Véase Ejemplo 15.2.) Calcúlese la demanda total.

Solución: Usando (10.31) se tiene

$$x(p) = \int_a^b nAp^{-1{,}5}r^{2{,}08}Br^{-2{,}5}\,dr = nABp^{-1{,}5}\int_a^b r^{-0{,}42}\,dr$$

Por tanto,

$$x(p) = nABp^{-1{,}5}\left|_a^b \frac{1}{0{,}58}r^{0{,}58} = \frac{nAB}{0{,}58}p^{-1{,}5}(b^{0{,}58} - a^{0{,}58})\right.$$

Valor actual descontado de una línea continua futura de renta

En la Sección 6.6 estudiamos el valor actual de una serie de futuros pagos que habrá que hacer en unos momentos específicos. A menudo es más natural considerar el problema desde el punto de vista de los ingresos, suponiendo que éstos crecen de forma continua. Este es un aspecto distinto y complementario del anterior.

Supongamos que se va a recibir continuamente una renta desde un tiempo $t = 0$ a uno $t = T$ a la tasa de $f(t)$ dólares por año en el instante t. Supongamos que el interés se compone continuamente a la tasa r.

Designemos por $P(t)$ al valor actual descontado de la línea de renta en el intervalo $[0, t]$. Esto quiere decir que $P(t)$ representa la suma de dinero que hay que depositar en el instante $t = 0$ para igualar el resultado de depositar continuamente la línea de renta $f(t)$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$.

Si dt es cualquier número, el valor actual descontado de la renta percibida en el intervalo $[t, t+dt]$ es $P(t+dt) - P(t)$. Si dt es pequeño, la renta percibida en ese intervalo es aproximadamente $f(t)\,dt$, y el valor actual descontado de esta cantidad es aproximadamente $f(t)e^{-rt}\,dt$.

Así, $P(t+dt) - P(t) \approx f(t)e^{-rt}\,dt$ y por tanto

$$\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} \approx f(t)e^{-rt}$$

Esta aproximación mejora más cuanto menor es dt y, en el límite cuando $dt \to 0$, tenemos

$$P'(t) = f(t)e^{-rt}$$

Por definición de integral definida, $P(T) - P(0) = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$. Como $P(0) = 0$, tenemos lo siguiente:

El **valor actual descontado** (VAD) (a tiempo 0) de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[0, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VAD} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \tag{10.32}$$

La ecuación (10.32) da el valor en el instante 0 de la línea de renta $f(t)$ percibida en el intervalo de tiempo $[0, T]$. El valor de esta cantidad, en el instante T, con interés compuesto continuamente a la tasa r, es $e^{rT} \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$. Como e^{rT} es una constante, podemos escribir la integral anterior en la forma $\int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt$. Se llama a esto el valor futuro descontado de la línea de renta:

El **valor futuro descontado** (VFD) (al tiempo T) de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[0, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VFD} = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt \tag{10.33}$$

Una modificación fácil de (10.32) nos dará el valor descontado en el instante $s \in [0, T]$ de una línea de renta $f(t)$ percibida durante el intervalo de tiempo $[s, T]$. En efecto, el valor descontado en el instante s de la renta $f(t)$ percibida en el pequeño intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ es $f(t)e^{-r(t-s)}\,dt$. Así tenemos lo siguiente:

El **valor descontado** (VD) en el instante s de una línea continua de renta a la tasa de $f(t)$ dólares anuales en el intervalo de tiempo $[s, T]$, a interés continuo de tasa r, viene dado por

$$\text{VD} = \int_{t=s}^T f(t)e^{-r(t-s)}\,dt \tag{10.34}$$

Ejemplo 10.11

Hallar el VAD y el VFD de una línea constante de renta de 1.000 dólares anuales en los próximos 10 años, a una tasa de interés continuo del $r = 8\% = 0{,}08$ anual.

Solución:

$$\text{VAD} = \int_0^{10} 1.000e^{-0{,}08t}\,dt = \Big|_0^{10} 1.000\left(-\frac{e^{-0{,}08t}}{0{,}08}\right) = \frac{1.000}{0{,}08}(1 - e^{-0{,}8}) \approx 6.883{,}39$$

$$\text{VFD} = e^{0{,}08\cdot 10}\text{VAD} \approx e^{0{,}8} \cdot 6.883{,}39 \approx 15.319{,}27$$

Problemas

1 Supongamos que la tasa de extracción $u(t)$ de un pozo petrolífero decrece exponencialmente con el tiempo, es decir $u(t) = \bar{u}e^{-at}$, donde a es una constante positiva. Dada la reserva inicial $x(0) = x_0$, hallar la expresión $x(t)$ de la cantidad de petróleo que queda en el instante t. Hallar la condición para que el pozo no se agote.

2 (a) Seguir el modelo del Ejemplo 10.9 y hallar la renta media m en el intervalo $[b, 2b]$ cuando $f(r) = Br^{-2}$.

(b) Supongamos que la función de demanda individual es $D(p, r) = Ap^{\gamma}r^{\delta}$ con $A > 0$, $\gamma < 0$, $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Calcular la demanda total $x(p)$ usando la fórmula (10.31), suponiendo que hay n individuos en la población.

3 Supongamos que $K(t)$ designa el stock de capital de una economía en el instante t. Se define la **inversión neta** en el instante t, y se designa por $I(t)$, como la tasa de crecimiento $\dot{K}(t)$ de $K(t)$.

(a) Si $I(t) = 3t^2 + 2t + 5$ $(t \geq 0)$, ¿cuál es el aumento total del stock de capital en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5$?

(b) Si $K(t_0) = K_0$, hallar la expresión del aumento total del stock de capital entre el instante $t = t_0$ y $t = T$ cuando la función de inversión $I(t)$ es la de la parte (a).

4 Hallar los valores actual y futuro de una línea constante de renta de 500 dólares anuales para los próximos 15 años, a una tasa de interés continuo del $r = 6\% = 0{,}06$ anual.

5 (a) Hallar valor actual descontado (VAD) de una línea constante de renta de a dólares anuales en los próximos T años, a una tasa de interés continuo del r anual.

(b) ¿Cuál es el límite del VAD cuando $T \to \infty$? Comparar este resultado con (6.22) de la Sección 6.6.